BLOQUE III: MATEMÁTICA DISCRETA

TEMA 2

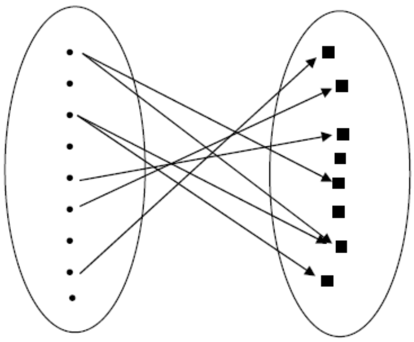
RELACIONES Y ÓRDENES

RESUMEN TEÓRICO

1. RELACIONES

DEFINICION 1. Se llama <u>relación binaria</u> entre dos conjuntos A y B a cualquier conjunto R de pares ordenados tal que $R \subseteq A{\times}B$. Decimos en este caso que R es una relación entre A y B.

Idea: Elementos del primer conjunto relacionados con elementos del segundo



Si $(x, y) \in R$ diremos que x está relacionado con y mediante R y se denota también escribiendo $x\ R\ y$ en lugar de $(x, y) \in R$.

También se escribe $x \not R\ y$ para indicar que x no está relacionado con y mediante R

DEFINICION 2. Dada una relación $R \subseteq A{\times}B$, se llama:

<u>Dominio</u> de R a $Dom(R) = \{x \in A / x\ R\ y \text{ para algún } y \in B\}$

<u>Rango</u> de R a $Ran(R) = \{y \in B / x\ R\ y \text{ para algún } x \in A\}$

OBSERVACIÓN:

El concepto de <u>función parcial</u> definido en el tema anterior es un caso particular del de relación. Explícitamente, una relación $R \subseteq A{\times}B$ es una función parcial de A en B si:

$$\left.\begin{matrix} x\ R\ y \\ x\ R\ y' \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = y'$$

Es decir, para cada elemento $x \in A$ hay a lo sumo un elemento $y \in B$ tal que $x\ R\ y$

Además, la relación $R \subseteq A{\times}B$ es una función total de A en B cuando para todo $x \in A$ existe un único $y \in B$ tal que $x\ R\ y$

NOTA: En el caso en que A y B sean el mismo conjunto, es decir, $R \subseteq A{\times}A$, diremos simplemente que R es una relación sobre A

EJEMPLO 1.

$A = B = \{2,3,4,6\}$

$xRy \Leftrightarrow x$ es divisor de y

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (6,6)\}$

$Dom(R) = \{2,3,4,6\}$

$Ran(R) = \{2,3,4,6\}$

EJEMPLO 2.

$M = \{Madrileños\}$

$xRy \Leftrightarrow x$ es tío de y

$Dom(R) = \{madrileños\ que\ son\ tíos\ de\ madrileños\}$

$Ran(R) = \{madrileños\ que\ son\ sobrinos\ de\ madrileños\}$

DEFINICION 3. Relación identidad sobre A es una relación que relaciona cada objeto únicamente consigo mismo:

$id_A = \{(x,x)/x \in A\}$

DEFINICION 4. Sean dos relaciones binarias, $R \subseteq A\times B$ y $S \subseteq A\times B$. Es posible definir las siguientes relaciones:

- Relación Unión: $R \cup S = \{(x,y)/x\ R\ y \text{ o } x\ S\ y\}$
- Relación Intersección: $R \cap S = \{(x,y)/x\ R\ y \text{ y } x\ S\ y\}$
- Relación Complemento: $\bar{R} = \{(x,y)/x \not{R}\ y\}$
- Relación inversa: $R^{-1} = \{(y,x)/x\ R\ y\}$
- Si $R \subseteq A\times B$ y $S \subseteq B\times C$ se define la composición o producto de R y S:

$$R \circ S = \{(x,z)/ \text{ existe } y \text{ tal que } x\ R\ y \text{ e } y\ S\ z\}$$

PROPIEDADES:

Algunas de las propiedades que verifican las relaciones construidas por composición y mediante la relación inversa:

- Si $R \subseteq A\times B$, entonces $R^{-1} \subseteq B\times A$
- Si $R \subseteq A\times B$, entonces $id_A \circ R = R \circ id_B = R$

Dentro de un mismo conjunto hay relaciones binarias que cumplen ciertas propiedades de interés. Entre ellas conviene destacar las siguientes:

- Una relación binaria R definida en un conjunto A cumple la propiedad <u>reflexiva</u> si todo elemento de A está relacionado consigo mismo, es decir:

  $\forall x \in A$ se verifica que xRx

- Una relación binaria R definida en un conjunto A cumple la propiedad <u>antireflexiva</u> si ningún elemento de A está relacionado consigo mismo, es decir:

  $\nexists x \in A$ que verifique xRx

- Una relación binaria R definida en un conjunto A cumple la propiedad <u>simétrica</u> si siempre que un elemento $x \in A$ está relacionado con otro elemento $y \in A$, también ocurre que y está relacionado con x, es decir:

  $\forall x, y \in A$ si xRy, entonces yRx

- Una relación binaria R definida en un conjunto *X* cumple la propiedad <u>antisimétrica</u> si siempre que dos elementos son tales que el primero está relacionado con el segundo y el segundo con el primero, necesariamente son el mismo, es decir:

  $\forall x, y \in A$ si xRy e yRx, necesariamente $x = y$

  Es decir, no existen $x, y \in A$, $x \neq y$ tales que xRy e yRx

- Una relación binaria R definida en un conjunto A cumple la propiedad <u>transitiva</u> si siempre que un elemento esté relacionado con un segundo elemento y este lo esté a su vez con un tercero, se verifica también que el primer elemento está relacionado con el tercero, es decir:

  $\forall x, y, z \in A$ si xRy e yRz, entonces xRz

- Una relación binaria R definida en un conjunto A cumple la propiedad de <u>completitud</u> o es <u>*conexa*</u> *si* dos elementos cualesquiera diferentes siempre están relacionados, es decir:

  $\forall x, y \in A$ se verifica xRy o yRx,

EJEMPLO 3.

Sea A el conjunto de todos los alumnos de una universidad y R la relación “estudiar la misma

- R no verifica la propiedad antirreflexiva puesto que cualquier alumno de la universidad estudia la misma titulación que el mismo
- R cumple la propiedad simétrica porque si un alumno x estudia la misma titulación que otro alumno y, también ocurre que y estudia la misma titulación que x.
- R no cumple la propiedad antisimétrica porque dos alumnos que estudien la misma titulación no tienen por qué ser la misma persona.
- R verifica la propiedad transitiva porque si un alumno x estudia la misma titulación que un segundo alumno y, y este a su vez estudia la misma titulación que un tercer alumno z, entonces el primer alumno x también estudia la misma titulación que el tercero z.
- R no cumple la propiedad de completitud porque seleccionados dos alumnos cualesquiera no tienen por qué estudiar la misma titulación.

EJEMPLO 4.

Sea A el conjunto de números naturales, $A = \mathbb{N}$ y la relación binaria "ser mayor o igual que". Esta relación binaria cumple las siguientes propiedades:

- Reflexiva puesto que todo número natural es mayor o igual que si mismo.
- No es antireflexiva por ser reflexiva
- Antisimétrica puesto que se cumple que si $x, y \in \mathbb{N}$ y verifican $x \geq y$ e $y \geq x$, necesariamente $x = y$.
- Transitiva porque si $x, y, z \in \mathbb{N}$ y verifican $x \geq y$ e $y \geq z$, entonces $x \geq z$.
- Completitud porque dados dos números naturales siempre se verifica que uno es mayor o igual que otro: dados $x, y \in \mathbb{N}$, entonces $x \geq y$ o bien $y \geq x$
- La relación binaria "ser mayor o igual que" en $\mathbb{N}$ no verifica la propiedad simétrica: dados $x, y \in \mathbb{N}$ que verifican $x \geq y$, no tiene por qué ocurrir $y \geq x$.

2. RELACIONES DE EQUIVALENCIA

DEFINICION 5. Una relación binaria R definida en un conjunto A es una <u>relación de equivalencia</u> si verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

PROPIEDADES:

Las clases de equivalencia verifican las siguientes propiedades $\forall x, y \in A$:

- $x \in [x]$
- $x \sim y$ si y solo si $[x] = [y]$
- $x \nsim y$ si y solo si $[x] \neq [y]$
- $x \nsim y$ si y solo si $[x] \cap [y] = \emptyset$

DEFINICION 7. El <u>conjunto cociente</u> de A con respecto a la relación de equivalencia $\sim$, que se denota mediante $A/\sim$, es la familia de subconjuntos de A formada por todas las clases de equivalencia de $\sim$:

$$A/\sim\, = \{[x]/x \in A\}$$

NOTA: Una relación de equivalencia ~ permite de esta forma una partición del conjunto A en clases de equivalencia, y al revés, toda partición sobre un conjunto tiene asociada una clase de equivalencia. Veamos matemáticamente qué es una partición.

DEFINICION 8. Se dice que $\mathcal{C}$ es una partición de A si cumple las siguientes condiciones:

- $C \neq \emptyset$, para todo $C \in \mathcal{C}$
- $\bigcup C = A$
- Para todo par de conjuntos C y C' tales que $C \neq C'$, se tiene que $C \cap C' = \emptyset$

Es decir, cada elemento de A está en un único elemento de la partición. Nótese que los elementos de la partición son conjuntos. Se verifica entonces:

- Si ~ es una relación de equivalencia sobre A, entonces $A/\sim$ es una partición de A
- Si $\mathcal{C}$ es una partición de A, entonces existe una única relación de equivalencia ~ sobre A tal que $A/\sim\, =\mathcal{C}$

EJEMPLO 5.

En el conjunto A del EJEMPLO 3 formado por todos los alumnos de una universidad, la relación "estudiar la misma titulación" es una relación de equivalencia porque cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Las clases de equivalencia están formadas por todos los alumnos matriculados en una misma

3. RELACIONES DE ORDEN

DEFINICION 9. Una relación binaria *R* definida en un conjunto A es una <u>relación de orden</u> (ordinario o parcial) si verifica las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Los órdenes se representan a menudo usando el símbolo $\sqsubseteq$

DEFINICION 10. Una relación de orden que sea conexa (propiedad de completitud) se dice que es un <u>orden lineal</u> o también <u>orden total</u>.

DEFINICION 11. Se llama <u>conjunto ordenado</u> al par $(A, \sqsubseteq)$ formado por un conjunto A y un orden $\sqsubseteq$ definido sobre A. Se dice entonces que el conjunto A está ordenado o que tiene estructura de orden.

DEFINICION 12. Si $\sqsubseteq$ es un orden total, se dice que $(A, \sqsubseteq)$ es un <u>conjunto totalmente ordenado</u>

EJEMPLO 6. Los siguientes son conjuntos ordenados

- $(\mathbb{N}_1, |)$, siendo $\mathbb{N}_1$ el conjunto de los números naturales positivos y | la divisibilidad. $x|y$ si x es divisor de y (o y es múltiplo de x)
- $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$,siendo A un conjunto cualquiera, $\mathcal{P}(A)$ el conjunto de subconjuntos de A y $\subseteq$ la inclusión de conjuntos
- $(A, \leq)$, con $\leq$ la relación menor o igual y A cualquier conjunto de números

DEFINICION 13. Una relación binaria *R* definida en un conjunto A es una <u>relación de orden estricto</u> si verifica las propiedades antirreflexiva y transitiva.

Los órdenes estrictos se representan usando el símbolo $\sqsubset$

DEFINICION 14. Una relación de orden estricto que sea conexa (propiedad de completitud) se dice que es un <u>orden estricto lineal</u> o también <u>orden estricto total</u>.

NOTA:

Todo orden parcial definido sobre un conjunto A tiene asociado un orden estricto definido por:

$x \sqsubset y \Leftrightarrow x \sqsubseteq y$ y $x \neq y$

Y viceversa, todo orden estricto da lugar a un orden parcial:

$x \sqsubseteq y \Leftrightarrow x \sqsubset y$ o $x = y$

En relación con los conjuntos ordenados son importantes las funciones que preservan el orden.

DEFINICION 15. Sean $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ dos conjuntos ordenados y f una función de A en B. Se dice que f es <u>monótona</u> si se verifica:

$$\forall x, y \in A: x \sqsubseteq_A y \;\Rightarrow\; f(x) \sqsubseteq_B f(y)$$

DEFINICION 16. Sean $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ dos conjuntos ordenados y f una función de A en B. Se dice que f <u>preserva el orden</u> si se verifica:

$$\forall x, y \in A: x \sqsubseteq_A y \;\Leftrightarrow\; f(x) \sqsubseteq_B f(y)$$

DEFINICION 17. Sean $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ dos conjuntos ordenados y f una función de A en B. Se dice que f es un <u>isomorfismo de orden</u> si es biyectiva y preserva el orden. En este caso se dice que $(A, \sqsubseteq_A)$ y $(B, \sqsubseteq_B)$ son <u>conjuntos ordenados isomorfos</u>

DEFINICION 18. Para representar gráficamente órdenes sobre conjuntos finitos resulta útil emplear los diagramas de Hasse. Dado un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$, el <u>diagrama de Hasse</u> se obtiene de la siguiente manera:

- Cada elemento del conjunto *A* se representa en un vértice
- Se dibuja un segmento de línea en dirección ascendente entre los vértices x e y si $x \sqsubseteq y$ y además no existe ningún z tal que $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$

EJEMPLO 8.

Consideremos el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ con la relación de orden ≤ usual. El correspondiente diagrama de Hasse es:

$$\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \end{array}$$

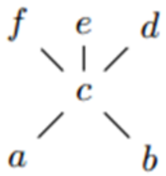
Dentro de los conjuntos ordenados se distinguen algunos elementos especiales. Son los elementos extremos y extremales.

DEFINICION 19. Dado un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y un subconjunto $S \subseteq A$, se dice que un

DEFINICION 22. Dado un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y un subconjunto $S \subseteq A$, se dice que un elemento $x \in S$ es el minimal en S si no existe $y \in S$, $y \neq x$, tal que $y \sqsubseteq x$

NOTA: Todo subconjunto finito y no vacío S de un conjunto ordenado tienen siempre elementos maximales y minimales, pero no siempre tiene máximo o mínimo. El máximo existirá si tienen un único elemento maximal, y el mínimo si tiene un único elemento minimal. Y viceversa, si el conjunto tiene elemento máximo y mínimo entonces tendrá un único elemento maximal y un único elemento minimal respectivamente.

EJEMPLO 9. En $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ se considera la relación de orden definida por el diagrama de Hasse:



No existe elemento de A mayor o igual que todos los demás, ni existe elemento de A menor o igual que todos los demás, por tanto no existe ni máximo ni mínimo.
Los elementos maximales de A son d, e y f, pues son aquellos para los cuales no hay ninguno mayor. Los elementos minimales de A son a y b, pues son aquellos para los cuales no hay ninguno menor.

Otros elementos de interés son las cotas, los ínfimos y los supremos.

DEFINICION 23. Dado un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y un subconjunto $S \subseteq A$, se dice que un elemento $x \in A$ es el cota superior de S si $u \sqsubseteq x$ para cualquier $u \in S$.

El conjunto de las cotas superiores de S se denota por $Sup\ (S)$ y se define como:

$$Sup\ (S) = \{x \in A / x \text{ es cota superior de } S\}$$

DEFINICION 24. Dado un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y un subconjunto $S \subseteq A$, se dice que un elemento $x \in A$ es el supremo de S si es el mínimo del conjunto $Sup\ (S)$. El supremo no existe siempre pero cuando existe se denota por $\coprod S = min\ Sup\ (S)$

DEFINICION 25. Dado un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y un subconjunto $S \subseteq A$, se dice que un elemento $x \in A$ es el cota inferior de S si $x \sqsubseteq u$ para cualquier $u \in S$.

DEFINICION 26. Dado un conjunto ordenado $(A, \sqsubseteq)$ y un subconjunto $S \subseteq A$, se dice que un elemento $x \in A$ es el <u>ínfimo</u> de S si es el máximo del conjunto $Inf\ (S)$. El ínfimo no existe siempre pero cuando existe se denota por $\prod S = max\ Inf\ (S)$

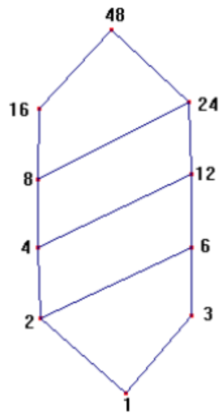
NOTA: El máximo y mínimo de un conjunto S pertenecen al conjunto S, mientras que el supremo y el ínfimo no necesariamente pertenecen a S. Si existen $máx\, S$ y $min\, S$, necesariamente $máx\ S = \coprod S$ y $min\ S = \prod S$

EJEMPLO 10. Sea el conjunto ordenado $(D_{48}, |)$, siendo D_{48} el conjunto de los divisores de 48 | la divisibilidad. $x|y$ si x es divisor de y (o y es múltiplo de x).

Los elementos del conjunto D_{48} son:

$D_{48} = \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\}$

El diagrama de Hasse es:



Sea el conjunto $S = \{2,3,4,6,12\}$. Se verifica:

$máxS = 12$

$maximal$ en $S = \{12\}$

No existe $min\ S$

$minimal$ en $S = \{2,3\}$

$Sup(S) = \{12,24,48\}$

$Inf(S) = \{1\}$

Supremo: $\coprod S = 12$

Ínfimo: $\prod S = 1$